Exercice 1 (sur le tenseur métrique) Vérifier les expressions du tenseur métrique des trois exemples du diapo n° 19 du cours introductif, ainsi que la formule générale de changement de coordonnées.

Exercice 2 (Paradoxe d'Olbers) On considère un modèle de l'Univers où les étoiles sont réparties uniformément dans un espace euclidien à trois dimensions, avec en moyenne ρ étoiles par unité de volume. Pour simplifier, on supposera que toutes les étoiles sont des corps sphériques de même rayon R. On suppose aussi constante l'intensité du rayonnement émis à la surface des étoiles (énergie rayonnée par seconde et par unité de surface). On rappelle que l'*éclat* d'une source d'intensité I située à une distance r de l'observateur est $\frac{I}{r^2}$.

a) On supposera un observateur situé quelque part dans l'Univers, et on étudiera son champ visuel en termes d'*angle solide*. Rappeler la définition d'un angle solide.

b) On considère un angle solide élémentaire $\mathrm{d}\omega$. Supposons qu'il intercepte la surface d'une étoile située à une distance r de l'observateur. Exprimez la surface interceptée (ou au moins un minorant).

c) Calculez l'énergie émise par cette portion de surface stellaire, par unité de temps ; calculez son éclat.

d) Comparez les résultats des deux questions précédentes pour deux étoiles distinctes situées à des distances r_1 et r_2 de l'observateur.

e) Pour donner un sens plus précis à l'hypothèse selon laquelle les étoiles sont *réparties uniformément*, on supposera que tout volume donné V suffisamment grand contient environ $\rho \times V$ étoiles, la position (X, Y, Z) de chacune suivant une loi de probabilité uniforme au sein du volume V. Étant donné un rayon visuel de l'observateur, montrez qu'il a une probabilité égale à 1 d'intercepter une étoile. Vous pourrez vous aider d'un cylindre long et étroit ayant ce rayon visuel pour axe.

f) Comparez l'éclat total du ciel de nuit à celui du Soleil. Quels arguments peut-on lever pour résoudre le paradoxe ?

Exercice 3 (Michelson-Morley) Pendant les années 1881-1887, Michelson, seul d'abord, puis secondé par Morley, réalise une série d'expériences d'interférométrie d'une très grande précision pour mettre en évidence le mouvement de la Terre par rapport à l'éther dans le cadre de la Mécanique galiléenne. La figure 1 montre le schéma de principe de l'expérience, en même temps que le vrai dispositif expérimental. Un faisceau lumineux, issu d'une source S, est divisé en deux par une lame semi-transparente. Un des rayons décrit alors la trajectoire AC aller-retour avant d'être envoyé par la lame vers le point d'observation, l'autre rayon faisant la même chose suivant le bras AB. Ce dessin montre en fait comment l'observation se ferait dans un référentiel où l'interféromètre, la source, l'observateur, etc. seraient immobiles par rapport à l'éther. Supposons maintenant que l'ensemble soit en mouvement par rapport à l'éther où, selon l'hypothèse de l'époque, la lumière se propage avec une vitesse c. Supposons qu'au moment de la mesure, la vitesse d'entraînement du système, $\mathbf{v}$, qui est en gros celle de la Terre par rapport à l'éther, soit dans la direction de l'un des bras, disons AB. Posons $\ell_1 = AB$ et $\ell_2 = AC$. Maintenant la lumière se déplace dans l'éther (par définition, en assimilant l'air au vide) et l'interféromètre est solidaire de la Terre. Le parcours des deux rayons lumineux peut être vu de la manière indiquée sur la figure 2 (les indices indiquent les positions des miroirs à des instants différents).

1) En vous plaçant dans le cadre de la physique classique pré-einsteinienne, calculez les temps t_1 et t_1' que la lumière met pour effectuer l'aller puis le retour suivant le bras ℓ_1, puis leur somme. Faites de même pour le bras ℓ_2, soit t_2 et t_2'. Sous l'hypothèse que les deux bras sont d'égale longueur, comparez $t_1 + t_1'$ à $t_2 + t_2'$.

2) Même question, mais du point de vue de la relativité restreinte.

3) Si $t_1 + t_1' \neq t_2 + t_2'$, on devrait observer un phénomène d'interférence au niveau de la lentille. Qu'ont observé Michelson et Morley ? Qu'en conclure ?

Fig. 1 : interféromètre

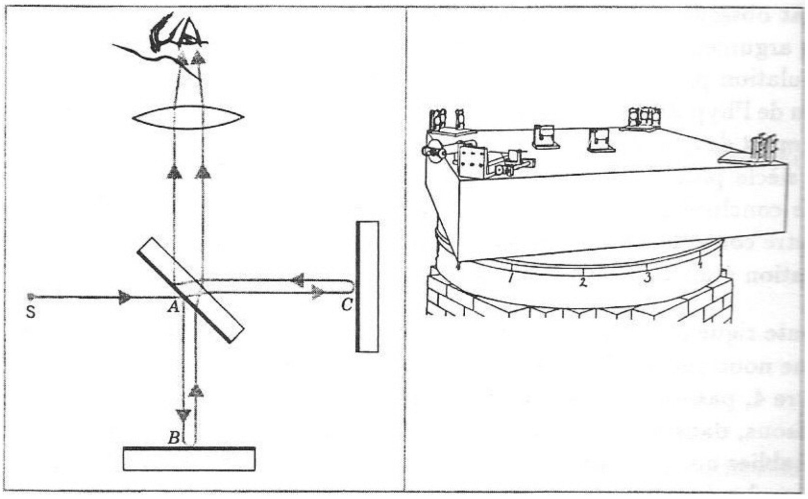
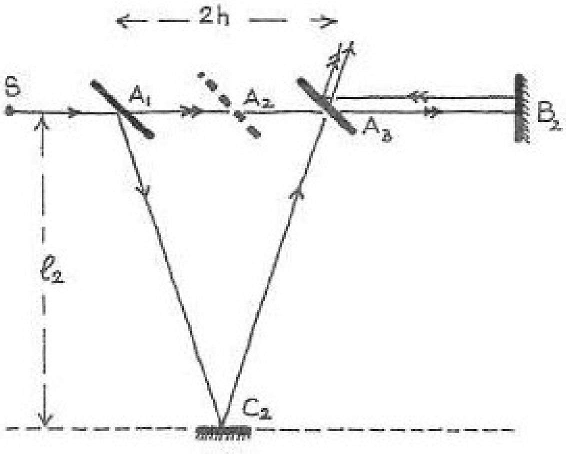


Fig. 2 : parcours des deux rayons



Exercice 4 Montrez que parmi les seize équations $\eta_{\gamma\delta} = \Lambda^{\alpha}{}_{\gamma}\Lambda^{\beta}{}_{\delta}\eta_{\alpha\beta}$, il y en a douze qui sont égales deux à deux (d'où au plus dix équations indépendantes).

Exercice 5

1) Montrez que la matrice suivante décrit une transformation de Lorentz propre :

$$\begin{pmatrix} \gamma & \gamma v & 0 & 0 \\ \gamma v & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2) Quelles sont les transformations de Lorentz vérifiant la condition suivante :

$$\Lambda^{0}{}_{0} = 1, \qquad \Lambda^{i}{}_{0} = 0 \quad (i = 1,2,3)$$

Exercice 6 Le but de cet exercice est de montrer qu'il existe une transformation de Lorentz transformant une particule au repos dans un référentiel x^{α} en une particule animée d'un mouvement rectiligne uniforme de vitesse **v** dans un référentiel x'^{α}, et telle que $(\forall\alpha,\beta)\ \Lambda^{\alpha}{}_{\beta} = \Lambda^{\beta}{}_{\alpha}$.

a) Soit Λ une transformation de Lorentz propre transformant une particule au repos en une particule animée d'un mouvement rectiligne uniforme de vitesse $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$. Montrez que $\Lambda^{0}{}_{0} = \gamma$ et $\Lambda^{i}{}_{0} = \gamma v_i$ où $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\mathbf{v}^2}}$.

b) Si $\mathbf{v} = \mathbf{0}$, montrez que Λ est une rotation spatiale.

c) Si $\mathbf{v} = \mathbf{0}$, que signifie la condition $(\forall\alpha,\beta)\ \Lambda^{\alpha}{}_{\beta} = \Lambda^{\beta}{}_{\alpha}$?

d) Montrez que la matrice étudiée dans la question 1 de l'exercice précédent est vérifie les conditions cherchées pour $\mathbf{v} = (v, 0, 0)$.

e) Montrez que, si S est une matrice carrée symétrique et que R est une rotation, alors $RS^{t}R$ est symétrique.

f) Conclure.

Exercice 7 (Mouvement uniformément accéléré) Pour une particule se déplaçant à la vitesse $\mathbf{v}$, on définit les quantités $u^\mu = \dfrac{dx^\mu}{d\tau}$ et $a^\mu = \dfrac{d^2x^\mu}{d\tau^2}$ avec τ le temps propre de la particule. On se place dans le cadre de la théorie de la relativité restreinte (c'est-à-dire que l'on néglige les effets de la gravitation).

1) Montrez que u^μ et a^μ sont des quadri-vecteurs. Interprétez chacun de ces quadri-vecteurs.

2) Montrez que $u_\mu u^\mu = -1$. Donnez les composantes de u^μ en fonction de $\gamma(\mathbf{v}) = (1-v^2)^{-1/2}$ et de $\mathbf{v}$.

3) Montrez que $a_\mu u^\mu = 0$.

On considère une fusée quittant la Terre à un instant $t = 0$ dans le référentiel terrestre, supposé inertiel. La fusée, dans son référentiel propre, subit une accélération *constante* suivant l'axe des x de $a = 9{,}81$ ms^{-2}. Du point du vue de la Terre, le voyage dure 75 ans.

4) Quelle est l'accélération à un instant t quelconque dans le référentiel de la Terre ?

5) Ecrivez et résolvez l'équation du mouvement de la fusée dans le référentiel de la Terre.

6) Quelle est la distance parcourue par la fusée ?

7) Combien de temps s'est écoulé du point de vue de la fusée ?

8) Quelle est la ligne d'univers décrite par la fusée dans le plan (x, t) ?

Exercice 8 (un critère de tensorialité) Démontrez que $T^{\mu\nu\lambda\dots}$ est un tenseur de rang n si et seulement si quels que soient les n vecteurs covariants $U_\mu, V_\nu, W_\lambda, \dots$, la grandeur $T^{\mu\nu\lambda\dots}U_\mu V_\nu W_\lambda\dots$ est un scalaire.

Exercice 9

a) On dit qu'un tenseur $T^{\mu\nu}$ est symétrique si $T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}$, et qu'il est antisymétrique si $T^{\mu\nu} = -T^{\nu\mu}$. Montrer que le fait d'être symétrique ou antisymétrique est invariant par le groupe de Lorentz.

b) Montrez que tout tenseur contravariant de rang 2 s'écrit de manière unique comme somme d'un tenseur symétrique et d'un tenseur antisymétrique.

c) Trouvez un tenseur mixte $T^\alpha{}_\beta$ et deux référentiels inertiels x^α et x'^α tels que $T^\alpha{}_\beta = T^\beta{}_\alpha$ mais $T'^\alpha{}_\beta \neq T'^\beta{}_\alpha$

Exercice 10 (tenseur énergie-impulsion électromagnétique) Notons $F^{\alpha\beta}$ le tenseur de Maxwell. On définit le tenseur énergie-impulsion électromagnétique par :

$$T_{\mathrm{em}}{}^{\alpha\beta} = F^{\alpha}{}_{\gamma} F^{\beta\gamma} - \frac{1}{4}\eta^{\alpha\beta} F_{\gamma\delta} F^{\gamma\delta}$$

Au moyen des équations de Maxwell, démontrez que :

$$\frac{\partial}{\partial x^{\beta}} T_{\mathrm{em}}{}^{\alpha\beta} = -F^{\alpha}{}_{\gamma} J^{\gamma}$$

Exercice 11 – Géométrie intrinsèque sur la sphère Considérons une sphère de rayon R et localisons chaque point de cette sphère par ses angles zénithal et azimutal (θ,ϕ), avec $\theta \in [0,\pi]$ et $\phi \in [-\pi,\pi]$. La métrique sera donnée par :

$$d\tau^2 = R^2 d\theta^2 + R^2 \sin^2\theta \, d\phi^2$$

1) Explicitez le tenseur métrique $g_{\mu\nu}$ et son inverse $g^{\mu\nu}$.

2) On fait le changement de coordonnées $(\theta,\phi) \mapsto (\rho,\sigma)$ défini par

$$\rho = R\sin\theta, \qquad \sigma = \phi$$

   a) Calculez le tenseur métrique par rapport à ce nouveau système de coordonnées.

   b) On considère un petit cercle au pôle nord de la sphère, centré en $\rho = 0$. Comparez la circonférence du cercle et son rayon mesuré le long d'une géodésique.

   c) Montrez comment un individu vivant à la surface de la sphère pourrait calculer le rayon de la sphère en faisant de la géométrie intrinsèque et en restant dans un voisinage du pôle nord.

Exercice 12 – Effet Doppler gravitationnel On considère un espace-temps muni d'une métrique $g_{\mu\nu}$ statique, au sens où $g_{\mu\nu}$ ne dépend pas de la coordonnée temps :

$$g_{\mu\nu} = f(x^1, x^2, x^3)$$

Soient deux horloges A et B identiques, immobiles spatialement, et respectivement fixées en $x^i = X_A^i$ et $x^i = X_B^i$. D'un point de vue spatial, l'horloge A est en $(x^1, x^2, x^3) = (0, 0, 0)$ tandis que l'horloge B est en $(x^1, x^2, x^3) = (\Delta x, 0, 0)$. Ces horloges mesurent le temps de façon identique (elles sont rythmées par le même processus physique) : leur rythme est donné par un pendule de période propre $\Delta\tau_{\text{pendule}}$.

1) Quelle est l'expression de dx^0 en fonction du temps propre de chaque horloge ?

On suppose que l'horloge A émet des photons en direction de l'horloge B (les photons se déplacent suivant x^1) à intervalles de temps propre régulier : $\Delta\tau^A_{\text{émission}} = \Delta\tau_{\text{pendule}}$. On rappelle que la propagation d'un photon se traduit par $d\tau = 0$, et, pour simplifier les calculs, on supposera le tenseur métrique diagonal.

2) Donnez $\Delta x^0_{\text{émission}}$, l'intervalle en x^0 entre l'émission de deux photons par l'horloge A.

3) On considère un premier photon émis par A à $x^0 = 0$. Quel est l'instant de réception de ce photon par l'horloge B ? (on exprimera le résultat en fonction d'une intégrale sur x^1)

4) Montrez que l'intervalle de temps $\Delta x^0_{\text{réception},B}$ entre deux réceptions de photons en B est égale à $\Delta x^0_{\text{émission},A}$.

On considère que l'horloge B émet elle aussi des photons à intervalles de temps propre réguliers : $\Delta\tau^B_{\text{émission}} = \Delta\tau_{\text{pendule}}$.

5) Donnez $\Delta x^0_{\text{émission},B}$, l'intervalle en x^0 entre l'émission de deux photons par l'horloge B.

6) Donnez le rapport entre l'intervalle de temps de réception par B des photons émis par A, divisé par l'intervalle de temps d'émission des photons émis par B.

7) Comment interpréteriez-vous la fréquence d'émission des photons par l'horloge B ainsi que la fréquence de réception en B des photons émis par l'horloge A ?

8) On suppose que $g_{00}(X_A^i) > g_{00}(X_B^i)$. La fréquence de réception des photons en B est-elle plus grande ou plus faible que celle d'émission (toujours en B) ?

Exercice 13

a) Soit $T^{\mu\lambda} = -T^{\lambda\mu}$ un tenseur contravariant d'ordre 2, antisymétrique. Montrez que sa divergence s'écrit :

$$T^{\mu\nu}{}_{;\mu} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial(\sqrt{g}T^{\mu\nu})}{\partial x^{\mu}}$$

b) Soit $T_{\mu\nu} = -T_{\nu\mu}$ un tenseur covariant d'ordre 2, antisymétrique. Montrez que

$$T_{\mu\nu;\lambda} + T_{\lambda\mu;\nu} + T_{\nu\lambda;\mu} = \frac{\partial T_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}} + \frac{\partial T_{\lambda\mu}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial T_{\nu\lambda}}{\partial x^{\mu}}$$

Exercice 14 On a défini en cours un opérateur $A^{\mu} \mapsto A^{\mu}{}_{;\lambda}$ qui associe à tout vecteur un tenseur coïncidant avec la notion de dérivée partielle dans les référentiels localement inertiels.

On considère maintenant le déplacement d'un vecteur A^{μ} le long d'une courbe $\mathscr{C}$ paramétrée par le temps propre τ. On cherche à définir un opérateur différentiel qui associe à A^{μ} un tenseur jouant le rôle de la dérivée par rapport à τ.

a) Montrez que $\dfrac{dA^{\mu}}{d\tau}$ n'est pas un tenseur. Proposez un tenseur le remplaçant.

b) Appliquez cette généralisation au cas de la quadri-vitesse d'une particule le long de la courbe $\mathscr{C}$, c'est-à-dire $\dfrac{dx^{\mu}}{d\tau}$.

Quand un vecteur est déplacé le long d'une courbe tout en restant le plus possible parallèle à lui-même pendant le déplacement, on dit qu'il s'agit d'un « transport parallèle ». En chaque point X, dans un référentiel localement inertiel ξ^{α}_{X}, cela se traduit par $\dfrac{\partial A^{\mu}}{\partial \xi^{\lambda}}(X)\dfrac{d\xi^{\lambda}}{d\tau}(X) = 0$, c'est-à-dire $\dfrac{dA^{\mu}}{d\tau}(X) = 0$ (et cette dernière équation est valable même si A^{μ} n'est défini que le long d'une courbe).

c) En considérant un petit déplacement $d\tau$ le long de la courbe autour de X, expliquez pourquoi $\dfrac{dA^{\mu}}{d\tau}(X) = 0$ est une condition suffisante pour que le vecteur en $\tau + d\tau$ soit colinéaire au vecteur en τ.

d) Ecrire l'équation du transport parallèle dans un système de coordonnées quelconque x^{λ}.

e) Appliquez ce dernier résultat au cas de la quadri-vitesse. Quelle est l'interprétation géométrique de l'équation du mouvement d'une particule dans un espace courbe ?

Exercice 15 – Quelques propriétés du tenseur de Riemann

a) On rappelle que le tenseur de Riemann est défini par :

$$R^{\lambda}{}_{\mu\nu\kappa} = \frac{\partial\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}}{\partial x^{\kappa}} - \frac{\partial\Gamma^{\lambda}_{\mu\kappa}}{\partial x^{\nu}} + \Gamma^{\eta}_{\mu\nu}\Gamma^{\lambda}_{\kappa\eta} - \Gamma^{\eta}_{\mu\kappa}\Gamma^{\lambda}_{\nu\eta}$$

Les dérivées covariantes sont définies par :

$$V^{\mu}{}_{;\lambda} = \frac{\partial V^{\mu}}{\partial x^{\lambda}} + \Gamma^{\mu}_{\lambda\kappa}V^{\kappa} \qquad \text{et} \qquad V_{\mu;\nu} = \frac{\partial V_{\mu}}{\partial x^{\nu}} - \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}V_{\lambda}$$

Soit V_μ un quadri-vecteur covariant. Montrez que :

$$V_{\mu;\nu;\kappa} - V_{\mu;\kappa;\nu} = -V_{\sigma}R^{\sigma}{}_{\mu\nu\kappa}$$

$$V^{\lambda}{}_{;\nu;\kappa} - V^{\lambda}{}_{;\kappa;\nu} = V^{\sigma}R^{\lambda}{}_{\sigma\nu\kappa}$$

b) On rappelle que :

$$\Gamma^{\sigma}_{\lambda\mu} = \frac{1}{2}g^{\nu\sigma}\left(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}} + \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^{\nu}}\right)$$

Exprimez le tenseur de Riemann $R_{\lambda\mu\rho\nu}$ en fonction des dérivées secondes du tenseur métrique, dans un référentiel localement inertiel.

c) On rappelle que $R_{\mu\nu} = R^{\lambda}{}_{\mu\lambda\nu}$. Montrez que, dans tout référentiel :

(i) $R_{\lambda\mu\rho\nu} = R_{\rho\nu\lambda\mu}$ et $R_{\lambda\mu\rho\nu} = R_{\mu\lambda\nu\rho} = -R_{\mu\lambda\rho\nu} = -R_{\lambda\mu\nu\rho}$

(ii) $R_{\mu\nu} = R_{\nu\mu}$ et $R_{\mu\nu} = -g^{\lambda\rho}R_{\mu\lambda\rho\nu} = -g^{\lambda\rho}R_{\lambda\mu\nu\rho} = g^{\lambda\rho}R_{\mu\lambda\nu\rho}$

d) On pose $B_{\lambda\mu\rho\nu\sigma} = R_{\lambda\mu\rho\nu;\sigma} + R_{\lambda\mu\sigma\rho;\nu} + R_{\lambda\mu\nu\sigma;\rho}$. Calculez $B_{\lambda\mu\rho\nu\sigma}$ dans un référentiel localement inertiel. Est-ce un tenseur ? Qu'en conclure ?

e) On pose $G^{\mu\nu} = R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R$.

(i) Calculez $g^{\mu\nu}g^{\lambda\rho}B_{\lambda\mu\rho\nu\sigma}$ en fonction des dérivées covariantes du tenseur de Ricci et du scalaire de courbure.

(ii) Montrez que $g_{\sigma\mu}G^{\mu\nu}{}_{;\nu} = -\frac{1}{2}g^{\mu\nu}g^{\lambda\rho}B_{\lambda\mu\rho\nu\sigma}$.

(iii) Qu'en conclure concernant $G^{\mu\nu}{}_{;\mu}$?

Exercice 16 – Equations d'Einstein et champs faibles Les équations d'Einstein sont de la forme :

$$c\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R\right) = T_{\mu\nu}$$

où c est une constante. Le but de cet exercice est de déterminer la constante c.

1) Retrouvez dans vos notes de cours l'expression du tenseur énergie-impulsion $T^{\mu\nu}$ d'un système de masses ponctuelles, du tenseur de Riemann $R_{\lambda\mu\nu\kappa}$ en fonction des dérivées secondes de la métrique, du tenseur de Ricci $R_{\mu\nu}$ et du scalaire de Ricci R.

2) Dans toute la suite, on supposera un système de masses ponctuelles non relativistes dans un champ gravitationnel faible et stationnaire. Rappelez l'équation de Poisson exprimant le lien entre la masse volumique et le potentiel gravitationnel.

3) En vous aidant de l'hypothèse que la matière est non relativiste, montrez que T_{ij} est négligeable devant T_{00} pour $1 \leq i, j \leq 3$ (dans la suite de l'énoncé, les lettres latines i, j désigneront toujours les indices des coordonnées spatiales).

4) On posera $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$. Déduire de la question précédente une relation entre R_{ij} et $\frac{1}{2}g_{ij}R$, puis montrer que $R \simeq 2R_{00}$.

5) Donnez la valeur approchée de $R_{\mu\nu\lambda\kappa}$ dans la limite des champs faibles.

6) En utilisant l'hypothèse que le champ est stationnaire, calculez R_{0000} et R_{i0j0}.

7) Déduisez-en la valeur de R_{00} en fonction des dérivées secondes du tenseur métrique.

8) Pour un champ faible non stationnaire engendré par une masse M, vous connaissez déjà l'expression de g_{00} en fonction du potentiel. Utilisez cette relation pour trouver c.

Exercice 17 On considère un espace tri-dimensionnel avec un système de coordonnées (r,θ,ϕ) et une métrique définie par l'équation :

$$ds^2 = \frac{1}{1-kr^2}dr^2 + r^2 d\tilde{\theta}^2 + r^2 \sin^2\tilde{\theta}\, d\tilde{\phi}^2$$

où $\tilde{\theta} \in [0,\pi]$, $\tilde{\phi} \in [-\pi,\pi]$, et k est une constante égale à -1, 0 ou 1. Il s'agit des sections à $t = 0$ des espaces-temps utilisés pour décrire l'Univers dans le modèle dit de “Robertson-Walker”.

a) Explicitez le tenseur métrique g_{ij} ainsi que la matrice inverse g^{ij} (on travaille ici en trois dimensions seulement, donc $1 \leq i, j \leq 3$).

b) Désormais, on pose $k = 1$. On change de système de coordonnées en posant $r = \sin\chi$. Explicitez le tenseur métrique dans le nouveau référentiel. Quelles sont les équations des géodésiques passant par le point $r = 0$ dans le nouveau référentiel ? Quelle variable mesure la distance le long de ces géodésiques ?

c) Quelle est l'équation d'une sphère centrée en $r = 0$? Quelle est l'aire d'une sphère de rayon donné ?