Résumé analytique de ma thèse [1]

Dans un premier chapitre, nous exposons l'œuvre algébrique du mathématicien allemand de la première moitié du XVII$^{\text{e}}$ siècle, Johannes Faulhaber. Sans donner de méthode générale, Faulhaber avait recours à l'élimination dans l'usage qu'il faisait de la méthode des coefficients indéterminés, pour calculer certaines formules faisant intervenir des sommes de séries de puissances, ainsi que pour résoudre algébriquement des équations à une inconnue. Ce faisant, nous essayons de montrer la spécificité de l'œuvre algébrique de Faulhaber, en la considérant en elle-même, c'est-à-dire sans la comparer aux mathématiques de Descartes.

Dans le chapitre 2, nous analysons la contribution de Jan Hudde, puis les travaux de Newton et Leibniz sur l'élimination, qui ont été inspirés par ceux de Hudde. Les recherches de Hudde nous semblent marquer une étape importante dans un mouvement d'arithmétisation de l'algèbre ; mais il détourne aussi l'usage d'un algorithme arithmétique connu, en appliquant l'algorithme euclidien de calcul du plus grand commun diviseur de deux polynômes à l'élimination des inconnues. Il offre ainsi la première méthode générale d'élimination – si l'on excepte une méthode antérieure due à Fermat mais restée dans l'oubli. Il utilise cette méthode dans la recherche des facteurs rationnels d'une équation à une inconnue, *via* la méthode des coefficients indéterminés. Cette approche ressemble beaucoup à la méthode de résolution de l'équation de degré 4 qu'utilisaient Faulhaber et Descartes, et Hudde est ainsi conduit à attribuer la méthode des coefficients indéterminés à Descartes. Nous discutons du bien-fondé de cette attribution. D'autre part, Hudde utilise aussi l'algorithme euclidien pour déterminer les racines multiples d'une équation à une inconnue. Newton s'intéressait à l'élimination algébrique dès la fin des années 1660 et il l'enseigna à Cambridge. Sa méthode d'élimination, que nous désignons par la locution « méthode d'élimination successive des plus hautes puissances de l'inconnue » est légèrement différente de l'algorithme euclidien. C'est, semble-t-il, cette méthode qui lui a permis de calculer les résultants de deux équations de degrés m et n pour les couples (m, n) suivants : $(2, 2), (3, 2), (4, 2), (3, 3)$. D'autre part, il est aussi le premier, à notre connaissance, à avoir énoncé le théorème de Bézout pour deux courbes algébriques planes. Les travaux de Leibniz sur l'élimination sont restés ignorés pendant longtemps et ils n'existent qu'à l'état de brouillons et notes manuscrites publiés récemment par E. Knobloch. Ils sont liés à la découverte par Leibniz du concept de déterminant. Leibniz connaissait ainsi l'expression du résultant (m, n) sous forme d'un déterminant de $(m+n)$ lignes. Mais il proposa aussi une autre méthode d'élimination, « par conjonction d'équations inverses », qui ressemble à celles de Hudde et Newton. Enfin, rebuté par les difficultés calculatoires de l'élimination, il entreprit une étude combinatoire de l'algorithme euclidien du plus grand commun diviseur, dans le but de trouver des règles syntaxiques décrivant la formule de l'équation finale à laquelle il conduit, règles qui aurait permis d'écrire l'équation finale sans avoir à effectuer l'algorithme. Il est ainsi amené à étudier les propriétés d'homogénéité du résultant.

[1] Extrait (légèrement remanié) de l'introduction de ma thèse.

Le chapitre 3 présente la première étape d'une réflexion globale sur le commencement historique et le devenir de l'élimination en algèbre. Nous y étudions d'abord quelques travaux antérieurs à 1650, sans toutefois le faire d'une manière aussi exhaustive qu'avec Faulhaber :

- les procédés qu'employait l'algèbre arabe, et en particulier Abū Kāmil (IX$^{\text{ème}}$ siècle) pour résoudre des systèmes de plusieurs équations à plusieurs inconnues,
- la méthode de *syncrisis* de Viète que l'on peut interpréter comme résolution d'un système d'équations linéaires intervenant dans l'étude de la structure (*constitutio*) d'une équation à une inconnue,
- une méthode d'élimination chinoise, que l'on trouve dans un ouvrage du XIII$^{\text{e}}$ siècle, appliquée à la résolution de systèmes à deux, trois ou quatre inconnues, mais limitée par l'absence d'une théorie arithmétique des polynômes (à en juger par cet ouvrage, les mathématiciens chinois de cette période ne pouvaient pas représenter un polynôme général à trois inconnues),
- une méthode d'élimination proposée par Fermat, mais que celui-ci ne semble pas avoir su appliquer en géométrie d'une manière aussi circonspecte que Hudde sept ans plus tard.

Nous comparons ensuite mathématiquement les méthodes de Fermat, Hudde, Newton et Leibniz. Nous remarquons qu'il ne peut encore être question d'une véritable *théorie* de l'élimination, bien que ces méthodes générales marquent une étape importante dans l'histoire de l'élimination et un changement dont nous essayons ensuite de déceler le principe dans les mathématiques du XVII$^{\text{ème}}$ siècle.

Bien que l'élimination naisse chez Hudde dans l'élaboration des mathématiques cartésiennes, Descartes est en quelque sorte absent de cette évolution ; la théorie se développe même contre Descartes, puisqu'elle met en échec, par le théorème de Bézout, sa classification des équations. Ce retournement s'accentue encore dans l'œuvre de Rolle, que nous commentons dans le chapitre 4. Les méthodes d'élimination antérieures procédaient en suivant un ordre séquentiel de transformation d'une ou plusieurs équations au sein d'un système unique et en quelque sorte statique, à l'image de l'analyse en géométrie classique. La méthode de Rolle adopte au contraire un ordre que l'on pourrait qualifier d'arborescent : étant donné un système d'équations initial, Rolle le transforme, au terme de la construction d'un « arbre de direction », en plusieurs systèmes, dont la réunion des solutions constitue l'ensemble des solutions du système proposé. Bien que Leibniz construisît aussi des arbres (pour étudier des algorithmes récursifs tels que la division euclidienne), ses arbres sont plutôt des arbres syntaxiques que l'on peut rattacher à son goût pour la combinatoire. L'idée de Rolle, peut-être moins élaborée que celle de Leibniz, semble cependant nouvelle. On en trouve l'écho au XIX$^{\text{e}}$ siècle dans les travaux d'Ossian Bonnet. Enfin, Rolle généralise le théorème de Bézout à un nombre quelconque d'équations, sans toutefois le démontrer.

A l'instar du théorème fondamental de l'algèbre, de nombreuses démonstrations du théorème de Bézout vont voir le jour, posant aussi plusieurs problèmes conceptuels. Ce théorème est au cœur des travaux commentés dans nos chapitres 5 à 11. Le chapitre 5 présente l'œuvre de Maclaurin en théorie des courbes algébriques. Dans l'application du théorème de Bézout, Maclaurin compte les points d'intersection avec multiplicité. Ceci suppose une classification (encore grossière) des singularités des courbes algébriques et un concept (pas encore nommé) de multiplicité d'intersection de deux courbes en un point. Le produit des degrés des équations n'est plus seulement conçu comme une borne au nombre de solutions, mais comme leur nombre exact. Le théorème de Bézout est alors perçu comme un théorème général. Malgré les nombreuses exceptions auxquelles il est encore soumis (dues à la présence de points imaginaires et de points à l'infini), Maclaurin en cherche en effet la démonstration : il prétend même l'avoir démontré dans un supplément non publié à la *Geometria Organica*, qui n'a pas été retrouvé. Ce théorème permet à Maclaurin un nouveau genre de preuves purement géométriques, plus tard adopté aussi par Poncelet dans son *Traité des propriétés projectives des figures*. On verra aussi Maclaurin s'intéresser à d'autres problèmes énumératifs : combien de points déterminent une courbe de degré donné ? Quel est le nombre maximal de points doubles sur une courbe de degré donné ? Un thème traverse toute son œuvre : la « description organique » des courbes par des instruments. Certains des instruments décrits par Maclaurin pour tracer des courbes ayant des singularités données au moyen de courbes de degrés inférieurs peuvent s'interpréter comme des transformations birationnelles. Son maître Newton faisait grand cas de la recherche d'un instrument pour tracer des cubiques de genre 1. La raison de la difficulté tient au fait que, dans les instruments connus alors, le tracé était entièrement guidé par le mouvement d'un point le long d'une droite, ou la rotation d'une droite autour d'un point ; ces instruments ne pouvaient donc tracer que des courbes rationnelles. Maclaurin parvient cependant à renverser cet obstacle, et offre un instrument de nature différente pour tracer les cubiques de genre 1 ; mais un autre ouvrage, publié de manière posthume en 1748, montre qu'il avait continué de chercher – et ce jusqu'à la fin de sa vie – un autre procédé pour tracer les cubiques.

Il faut attendre les ouvrages d'Euler (1748) et Cramer (1750) pour lire les premières démonstrations du théorème de Bézout. Les travaux d'Euler et Cramer font l'objet des chapitres 6 et 7. On distingue dès lors deux voies possibles pour l'élimination. La première avait déjà été suivie par Leibniz. La seconde, illustrée par Euler dans un mémoire en 1748, puis par Cramer dans son traité *Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques* en 1750, ne semblait d'abord pouvoir s'appliquer qu'au cas de deux équations $\left\{\begin{array}{l} P(x)=0 \\ Q(x)=0 \end{array}\right.$, et supposait qu'une de ces deux équations ait un nombre de racines (a_i) égal à son degré (théorème fondamental de l'algèbre). Les coefficients des deux équations peuvent renfermer une autre inconnue y. Ainsi pour deux équations à deux inconnues x, y, l'équation finale résultant de l'élimination de x est un polynôme en y, et l'on calcule son degré au moyen d'une étude combinatoire sur les fonctions symétriques des racines (a_i) (étude menée à bien en détails seulement par Cramer). Poisson généralise cette approche pour un nombre quelconque d'équations. Son court mémoire de 1802, que nous commentons au chapitre 7, est reproduit en annexe B. Toujours dans le cas de deux équations, les racines de l'équation finale correspondent géométriquement à la projection sur l'axe des ordonnées des points d'intersection des deux courbes d'équations données. On peut faire en sorte que ces racines soient distinctes au moyen d'un changement générique d'axes de coordonnées. Le lien conceptuel entre intersection, projection et élimination est particulièrement étudié, et étendu au cas de l'intersection de deux surfaces dans l'espace, par Euler. Mais l'absence du concept d'espace projectif se fait sentir, à cause du fait que la projection

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{A}^3 & \longrightarrow & \mathbb{A}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x,y) \end{array}$$

n'est pas une application fermée. Se posent aussi la question des points imaginaires, celle des intersections impropres (Euler remarque que deux courbes peuvent avoir des composantes communes, et donc une infinité de points communs) et celle des « contacts » (points de contact, « lignes de contact » entre deux sufaces). Enfin le « paradoxe de Cramer », qu'avait déjà rencontré Maclaurin, montre que, dans certaines situations pourtant assez générales en théorie des courbes, un système de N équations linéaires à N inconnues n'a pas une solution *unique*. Il y a certes rupture avec un principe communément admis au XVII$^{\text{e}}$ siècle. C'est Cramer qui utilisera, en 1750, le terme de « paradoxe » pour désigner ce fait. La théorie de l'élimination dans les systèmes d'équations linéaires n'avait pas encore atteint la perfection désirable, mais Euler, sollicité par Cramer, explique le « paradoxe » par l'existence de relations de dépendance linéaire entre les N équations ; il a même l'idée de compter le nombre de ces relations.

Au chapitre 8, nous abordons les premières recherches de Bézout. Elles s'inscrivent dans la continuité des travaux d'Euler et Cramer. L'idée mise en œuvre par Bézout en 1764 est de chercher à déterminer *a priori* le degré de l'équation finale résultant de l'élimination d'un nombre quelconque d'inconnues. A cet effet, l'ensemble des opérations conduisant à l'élimination d'*une* inconnue est réduit à la formation d'une somme de produits des équations initiales par des polynômes multiplicateurs indéterminés. La méthode de Bézout échoue sauf dans le cas de deux équations, cas auquel Euler l'avait déjà appliquée. Mais dans ce cas, à la recherche d'une méthode d'élimination qui abrège les calculs, il conçoit la « matrice de Bézout », matrice qu'un mathématicien japonais avait déjà utilisée à la fin du XVII$^{\text{ème}}$ siècle.

Dans les années 1770, le théorème de Bézout pour un nombre quelconque d'équations est à nouveau dans le vent, chez Waring et Lagrange, puis chez Bézout. A la suite de Cramer, Lagrange utilise la théorie des fonctions symétriques des racines pour l'élimination algébrique ; il étudie plus généralement les fonctions des racines invariantes par certaines permutations, dans ses *Réflexions sur la résolution algébrique des équations*. Ce mémoire est l'objet de notre chapitre 9. C'est d'ailleurs la lecture des magnifiques travaux d'Euler, Bézout et

Lagrange sur la résolution algébrique des équations (à une inconnue) et sur le théorème fondamental de l'algèbre qui nous avaient d'abord conduits à étudier l'histoire de la théorie de l'élimination. Le théorème fondamental de l'algèbre, la recherche d'une méthode générale de résolution algébrique et le théorème de Bézout sont peut-être les trois grands problèmes de l'algèbre de la deuxième moitié du XVIII^{e} siècle. Le théorème fondamental et le théorème de Bézout ne sont d'ailleurs pas sans lien. Les deux énoncés, l'un sur l'existence, le nombre et la forme des racines d'une équation à une inconnue, l'autre sur le nombre des solutions d'un système de n équations à n inconnues, se ressemblent et soulèvent des problèmes analogues : le nombre prédit n'est-il qu'une borne supérieure ou bien est-il possible, en comptant des racines complexes (resp. points imaginaires) et des racines multiples (resp. points d'intersection multiples), de faire de ces énoncés des énoncés universels ? D'autre part l'élimination des inconnues dans un système de n équations à n inconnues le ramène au cas d'une unique équation à une inconnue : le problème de l'existence des solutions dans le théorème de Bézout est ainsi subordonné au théorème fondamental de l'algèbre. Enfin, certaines démonstrations du théorème fondamental de l'algèbre, dont celle de Lagrange, font abondamment recours à la théorie de l'élimination.

Le chapitre 10 est en majeure partie consacré au grand traité de Bézout, la *Théorie générale des équations algébriques*. Soient $f_1, ..., f_n$ des polynômes homogènes génériques à $(n+1)$ indéterminées de l'anneau gradué $C = k[X_0, ..., X_n]$ (où k est un corps), de degrés respectifs $k_1, ..., k_n$. Soit l'idéal $I = (f_1, ..., f_n)$. Eliminons $(n-1)$ parmi les n rapports indéterminés $\frac{X_i}{X_0}$ dans le système d'équations homogènes :

$$\begin{cases} f_1 = 0 \\ \vdots \\ f_n = 0 \end{cases}$$

La détermination du degré de l'équation finale par Bézout, faite par récurrence, et en comptant le nombre de « coefficients arbitraires » et le nombre de « coefficients inutiles » – notions correspondant respectivement au nombre d'inconnues et à la dimension de l'espace vectoriel des solutions lors de l'application de la méthode des coefficients indéterminés – le conduit en fait à calculer la dimension de certains espaces vectoriels, composantes homogènes de l'anneau C ou de ses quotients. Il aboutit à l'expression suivante du « degré de l'équation finale » (où r est un entier suffisamment grand, l'expression étant alors constante) :

$$(S) \quad \dim(C/I)_r = \dim C_r - \sum \dim C_{r-k_\alpha} + \sum \dim C_{r-k_\alpha-k_\beta} - ... + (-1)^n \dim C_{r-k_1-...-k_n}$$

Le raisonnement de Bézout repose sur l'exactitude de la suite :

$$0 \quad \to \quad (C/(f_2, ..., f_n))_{r-k_1} \quad \xrightarrow{f_1} \quad (C/(f_2, ..., f_n))_r \quad \to \quad (C/(f_1, f_2, ..., f_n))_r \quad \to \quad 0$$

où la première flèche désigne la multiplication par f_1, et la deuxième la projection canonique. Fait non trivial que Bézout ne peut justifier de manière rigoureuse. Ceci revient à démontrer que le « complexe de Koszul » suivant, associé à la suite $(f_1, ..., f_n)$, est exact :

$$0 \to C_{r-k_1-...-k_n} \to \ldots \to \bigoplus C_{r-k_\alpha-k_\beta} \to \bigoplus C_{r-k_\alpha} \to C_r \to (C/I)_r \to 0$$

Au moyen du calcul aux différences finies et de (S), Bézout montre finalement que $\dim(C/I)_r = k_1k_2...k_n$. Nous expliquons en détail la démonstration de Bézout dans la section 10.4, après avoir élucidé la structure de son traité dans la section 10.3 (cette section, plus destinée au lecteur potentiel du traité de Bézout, n'est pas essentielle pour lire la section 10.4). La somme alternée (S) réapparaît dans des travaux de Cayley de la fin des années 1840. Cayley, peut-être le premier, pense que derrière cette somme alternée se cache en quelque sorte un objet réel, une suite d'espaces vectoriels et des applications de l'un dans l'autre. Et en effet, la formule (S) découle immédiatement de l'exactitude du complexe de Koszul. Cayley cherche une expression de l'équation finale au moyen des mineurs des matrices de ces applications, mais ne peut entièrement mener à bien son projet ; il fallait, pour construire le complexe de Koszul, des méthodes d'algèbre extérieure qui dépassent bien sûr les outils qu'employaient Cayley. Nous avons choisi de présenter ces travaux de Cayley, ainsi que ceux, contemporains, de Sylvester et Hesse, dans la section 10.1, avant d'exposer ceux de Bézout, dont nous croyons qu'ils sont en avance sur leur temps. De même, dans la section 10.6, nous présentons des travaux postérieurs de plus d'un siècle à l'œuvre de Bézout, tel un article de Hurwitz en 1913. Ayant ainsi répondu à la question de l'influence, directe ou indirecte, des travaux de Bézout sur ses contemporains et ses successeurs, nous reprenons, dans le court chapitre 11, la réflexion globale entamée au chapitre 3. Nous y survolons les caractéristiques de cette théorie de l'élimination qui achève de naître à la fin du XVIII$^{\text{e}}$ siècle.

Au chapitre 12, nous reprenons l'œuvre de Sylvester, au sein de laquelle s'articulent théorie de Sturm, théorie des invariants et théorie de l'élimination. A la suite de Cayley, Sylvester étudie la forme quadratique associée à la matrice de Bézout et la nomme « bézoutiant ». Il montre que le nombre de racines réelles d'une équation $f = 0$ à coefficients réels est égal au nombre de racines positives plus un du polynôme caractéristique de la matrice de Bézout de f, f'. Il étudie de manière systématique les restes des divisions successives dans l'algorithme euclidien du plus grand commun diviseur, qu'il appelle « résidus complets » ; il détermine les facteurs superflus introduits par cet algorithme. Nous utilisons sa méthode pour déterminer aussi les facteurs superflus introduits par l'algorithme newtonien d'élimination des plus hautes puissances successives. Quant aux « résidus simplifiés », délivrés des facteurs superflus, Sylvester en donne des expressions en fonction des racines des équations initiales. Nous commentons aussi un article plus ancien de Jacobi (1835) qui anticipe certains des résultats de Sylvester. Enfin, les relations entre jacobien et bézoutiant inspirent à Sylvester des recherches sur les propriétés d'invariance du bézoutiant : le bézoutiant de f, ϕ est à la fois un covariant et un « combinant » de f, ϕ.

La théorie des courbes algébriques planes est un cas privilégié dans l'étude du phénomène de point d'intersection multiple. Le concept de multiplicité d'intersection de deux courbes en un point peut être défini au moyen de la formule du résultant due à Cramer, mais la signification géométrique d'une telle définition n'apparut que dans la deuxième moitié du XIX$^{\text{ème}}$ siècle, par l'étude locale des courbes au moyen du polygone de Newton ou de procédés analogues, à la suite de travaux de Puiseux et de Riemann. Nous décrivons ces travaux au chapitre 13. Tout ceci permit par exemple à Weierstrass de donner une étude exhaustive de l'intersection de deux courbes algébriques planes, dans un texte où règne cependant une certaine tension entre un mode de représentation propre à la « théorie des fonctions algébriques » (l'objet géométrique est alors le graphe dans $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ d'une fonction multivaluée $\mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$) et un mode de représentation propre à la géométrie algébrique (l'objet est une courbe de $\mathbb{P}^2$, définie par une équation algébrique). Nous expliquons aussi dans ce chapitre le concept de « point infiniment voisin » introduit par M. Noether, ainsi que l'application de la théorie de l'élimination au calcul du genre d'une courbe.

Dans un article sur le « théorème $A\phi + B\psi$ », M. Noether détermine la dimension de l'espace vectoriel des relations linéaires que les coefficients d'une série entière $f(x,y)$ doivent vérifier si et seulement si $f(x,y) \in (\phi,\psi)$, où ϕ,ψ sont des polynômes donnés. Ce nombre, en général égal au produit des ordres de ϕ et ψ en $(0,0)$, n'est autre que la multiplicité d'intersection de $\phi = 0$, $\psi = 0$ en $(0,0)$ telle que la définira Macaulay en 1916. Au chapitre 14, nous comparons les principales définitions de la multiplicité d'intersection qui ont vu le jour au XIX$^{\text{ème}}$ siècle, et même des définitions plus récentes comme celles de Samuel et de Serre. On est ici guidé par le sentiment que le concept de point d'intersection multiple n'est ni un concept arbitraire, ni une généralisation évidente de la notion arithmético-algébrique de racine multiple d'une équation à une inconnue, ni l'objet d'aucune intuition géométrique naïve. Nous parlons *du* concept de point d'intersection multiple, car une certaine unité se dessine à travers ces diverses définitions – unité qui est même *démontrée* par A. Weil, après qu'il a proprement axiomatisé ce concept. Ce concept permet non seulement de faire de certains théorèmes *généraux* (mais sujets à exceptions) des théorèmes *universels*, tels le théorème de Bézout ou la formule du genre d'une courbe algébrique plane de degré et de singularités donnés ; il permet aussi de définir, dans certaines situations, un calcul des cycles. Le mémoire de Halphen sur la détermination du nombre de coniques vérifiant certaines conditions données en donne un exemple déjà célèbre dans l'histoire de la géométrie énumérative.

Le chapitre 15 se présente comme un commentaire des *Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Grössen* de Kronecker. S'il était besoin de justifier la tâche d'un tel commentaire, que l'on pense aux *Bunte Bemerkungen* manuscrites de Dedekind, récemment publiées et témoignant des difficultés insurmontables qu'avait rencontrées un grand mathématicien à la lecture de cette œuvre. Nous ne pouvons d'ailleurs prétendre avoir entièrement élucidé le contenu des *Grundzüge*. Mais dans ce chapitre, ainsi que dans ceux sur Faulhaber et Maclaurin, nous avons choisi de mener une recherche plus large que notre sujet ne semblait l'imposer. Nous commentons les *Grundzüge* page après page, alors que la méthode d'élimination de Kronecker n'en occupe qu'une petite portion. Ce faisant, nous croyons avoir mieux compris le rôle de cette méthode dans la pensée kroneckerienne, pensée arithmétisante mais, de fait, n'excluant pas l'intuition géométrique. Dans une première partie des *Grundzüge*, Kronecker construit une théorie des corps et des entiers algébriques, au sein de laquelle la notion de discriminant joue un rôle privilégié. Son intérêt pour la théorie des nombres l'amène à construire une théorie de la divisibilité dans les anneaux d'entiers algébriques. Ces anneaux ne sont pas toujours factoriels, et Kronecker cherche à rétablir leur caractère factoriel et même principal, par ce qu'il appelle lui-même l'« auxiliaire des coefficients indéterminés ». Il utilise ce même moyen en théorie de l'élimination, pour réduire le problème de la décomposition d'une variété en composantes irréductibles au simple problème de factorisation d'un polynôme. L'extension du concept de grandeur algébrique, racine d'une certaine équation qui la définit comme telle, appelle en effet immédiatement celui de variété algébrique, lieu des zéros d'un système d'équations. Dans la méthode d'élimination de Kronecker, le nombre d'inconnues devant être éliminées pour séparer une certaine composante irréductible est égal à le codimension, moins un, de cette composante. Ainsi se trouve défini le concept de codimension (*Stufe*). Kronecker applique cette méthode en théorie de Galois. Il faut, pour le comprendre, concevoir l'ensemble des racines de l'équation irréductible dont on étudie le groupe de Galois comme étant les coordonnées d'un point. L'orbite du point par le groupe de Galois de l'équation constitue alors une certaine variété de dimension 0. En théorie de Galois, Kronecker agit davantage en continuateur de l'œuvre d'Abel, s'intéressant plus « à la nature arithmétique des questions algébriques ». Enfin dans les dernières sections des *Grundzüge*, difficiles et moins connues, Kronecker tente, à la manière dont il avait transformé tout anneau d'entiers algébriques en un anneau principal, d'utiliser à nouveau l'auxiliaire des coefficients indéterminés pour transformer, en quelque sorte, toute variété en une intersection complète.

Dans le chapitre 16, après avoir brièvement évoqué le développement de la notion de résultant réduit à la suite d'un article de Cayley (1847), nous commentons une communication de A. Brill au congrès international de Heidelberg en 1904, sur l'« élimination et la géométrie dans les dernières décennies ». Brill jugeait que la méthode d'élimination de Kronecker servirait peut-être à démontrer de manière rigoureuse les principes de la géométrie énumérative. C'est alors pour nous l'occasion, en guise de conclusion, de réfléchir sur un apparent retrait de la théorie de l'élimination, à partir des années 1940–1950, justement dans des travaux de fondement de la géométrie algébrique, comme dans l'ouvrage d'A. Weil où celui-ci a prétendu « éliminer l'élimination ».